



① خط تقارن سهمی $y = -x^2 + 6x + 9$ آن را در نقطه S قطع می‌کند. عرض نقطه S چند برابر طول آن است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) -۶

② اگر رأس یک سهمی روی نیم‌ساز ناحیه اول باشد و محور x ها را در نقاطی به طول‌های ۱- و ۳ قطع کند، آنگاه این سهمی محور y ها در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) ۳ (۴) -۳

③ نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور x ها را در نقاطی با طول‌های ۱- و ۳ و محور y ها را در نقطه‌ای با عرض ۶ قطع می‌کند. فاصله رأس سهمی از محور x ها کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

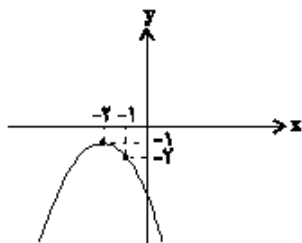
④ عرض رأس سهمی به معادله $y = 2x^2 - x + 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{8}$ (۲) $-\frac{7}{8}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $-\frac{1}{8}$

⑤ رأس سهمی $y = x^2 - kx + 1$ روی خط $y = -2x$ است. مقدار k کدام است؟

- (۱) $2 \pm \sqrt{3}$ (۲) $2 \pm \sqrt{5}$ (۳) $2 \pm \sqrt{8}$ (۴) $3 \pm \sqrt{3}$

⑥ معادله سهمی شکل زیر کدام است؟



(۱) $y = -x^2 - 4x - 3$

(۲) $y = -x^2 + 4x - 5$

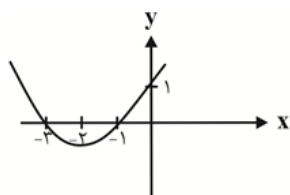
(۳) $y = -x^2 - 4x - 5$

(۴) $y = -4x^2 - 4x - 3$

⑦ نمودار سهمی به معادله $y = -x^2 + 4x - 1$ از کدام ناحیه محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۸) کدام گزینه معادله مربوط به سهمی مقابل است؟

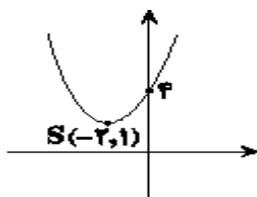


(۱) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

(۲) $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

(۳) $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

(۴) $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$



۹) معادله سهمی مقابل کدام است؟

(۱) $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + 4$

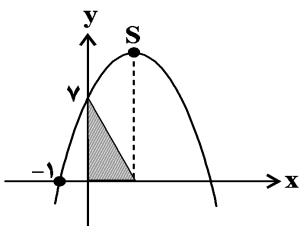
(۲) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 4$

(۳) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4$

(۴) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$

۱۰) اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر و مساحت مثلث هاشورخورده برابر با

۱۰/۵ باشد، حاصل $\frac{c-a}{b}$ کدام است؟



(۱) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{4}{3}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) ۱

۱۱) دو سهمی $y = x^2 + bx$ و $y = -2x^2 + 8x + 4$ محور تقارن یکسانی دارند و مقدار b کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۶

(۲) -۴

(۱) -۲

۱۲) نمودار سهمی به معادله $y = (2x-1)^2 + (x-2)^2$ از کدام نواحی مختصات عبور می‌کند؟

(۲) اول، دوم و چهارم

(۱) سوم و چهارم

(۴) هر چهار ناحیه

(۳) اول و دوم

۱۳) خط $y = x + 2$ با نمودار سهمی $y = x^2 + ax + b$ فقط در نقطه $x = -2$ مشترک هستند.

حاصل $a + b$ کدام است؟

(۴) ۱۱

(۳) -۱

(۲) ۶

(۱) ۵

۱۴) اگر $(2, 5)$ و $(-1, 20)$ دو نقطه از یک سهمی و $x = 1$ خط تقارن آن باشد، این سهمی در

نقطه‌ای با کدام عرض محورها را قطع می‌کند؟

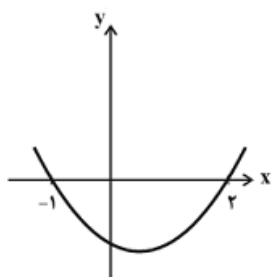
(۴) ۲

(۳) ۳

(۲) ۴

(۱) ۵

۱۵) شکل مقابل مربوط به سهمی $y = 2x^2 + bx + c$ می‌باشد. عرض رأس سهمی $y = cx^2 - x + b$ کدام است؟

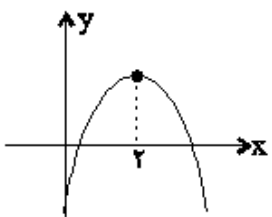


- (۱) $-\frac{31}{16}$
(۲) $\frac{31}{16}$
(۳) -2
(۴) 2

۱۶) اگر یکی از منحنی‌ها به معادله $y = (a-1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

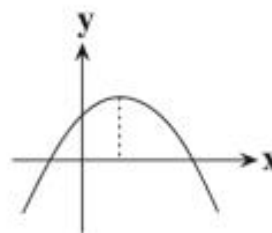
- (۱) 2
(۲) 3
(۳) 4
(۴) 6

۱۷) در سهمی زیر، که معادله آن به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است، حاصل کدام گزینه حتماً برابر صفر است؟



- (۱) $2a + b$
(۲) $4a - b$
(۳) $4a + b$
(۴) $2a - b$

۱۸) معادله سهمی شکل مقابل کدام می‌تواند باشد؟



- (۱) $y = x^2 - 2x - 3$
(۲) $y = -x^2 - x - 3$
(۳) $y = -x^2 + 2x + 3$
(۴) $y = -x^2 - x + 3$

۱۹) نمودار $y = -x^2 + 2x$ را چهار واحد به راست و k واحد به بالا منتقل کرده‌ایم. رأس سهمی جدید به صورت $(\alpha, 10)$ است. $\alpha \times k$ چه قدر است؟

- (۱) 45
(۲) 50
(۳) 40
(۴) 35

۴۰) رأس سهمی $y = -x^2 + 4x - 3$ بعد از عملیات انتقال به مبدا مختصات منتقل شده است. مختصات نقطه $(2, -4)$ که روی نمودار منتقل شده قرار دارد، متناظر با کدام نقطه در نمودار اولیه است؟

- (۱) $(0, -3)$ (۲) $(4, -3)$
(۳) $(2, 1)$ (۴) $(1, 0)$

۴۱) اگر رأس سهمی $y = x^2 - mx + m + 1$ بر روی خط $y = x + 1$ واقع باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱ یا ۳ (۲) ۱ یا -۳
(۳) صفر یا ۲ (۴) صفر یا -۲

۴۲) نقطه $(2, 3)$ رأس یک سهمی درجه دوم است که نمودار آن، پاره‌خطی به طول ۶ روی محور x ها جدا می‌کند. نمودار این منحنی محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{7}{4}$ (۲) $\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{5}{3}$

۴۳) دو سهمی $y = x^2 + ax + b$ و $y = -x^2 + 8x + c$ محور تقارن یکسانی دارند و فاصله عرض‌های رئوس آن‌ها ۲۳ واحد است. حاصل $a + b - c$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۶۳ (۲) ۱ (۳) ۱۷ (۴) ۵۵

۴۴) هر نقطه از تابع $y = x^2 - 4x - 1$ را ۳ واحد به چپ و ۱ واحد به بالا منتقل می‌کنیم. تابع جدید از کدام نقطه نمی‌گذرد؟

- (۱) $(0, -3)$ (۲) $(1, 0)$ (۳) $(-1, 5)$ (۴) $(2, 5)$

۴۵) نقطه $(1, -2)$ رأس یک سهمی است. معادله خطی که از این نقطه و یکی از ریشه‌ها می‌گذرد، $y = 4x - 6$ است. عرض این سهمی در نقطه‌ای به طول $\frac{1}{4}$ کدام است؟

- (۱) $1/5$ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) $2/5$

۴۶) در سهمی به معادله $y = \frac{1}{4}x^2 + mx + 3$ پایین‌ترین نقطه سهمی روی خط $y = -1$ قرار دارد. اگر طول رأس سهمی منفی باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{2}$ (۲) $-2\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

۴۷) اگر سهمی $y = 2x^2 + ax - 2b$ محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۴ قطع کند، عرض نقطه‌ای به طول $x = a + b$ روی سهمی کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۲۰ (۴) ۱۹

۴۸) یک سهمی در دو نقطه محور طول‌ها را قطع می‌کند که مختصات یکی از آن نقاط $(3, 0)$ است. اگر معادله محور تقارن سهمی به صورت $x = 6$ باشد، مختصات نقطه دیگری که سهمی در آن محور طول‌ها را قطع می‌کند، کدام است؟

- (۱) $(7, 0)$ (۲) $(8, 0)$ (۳) $(9, 0)$ (۴) $(10, 0)$

۳۹ اگر $(۲, -۳)$ و $(۰, -۳)$ دو نقطه از سهمی به معادله $y = ax^2 + ۴x + c$ باشند، خط تقارن این سهمی و بیشترین مقدار این سهمی به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

(۲) $x = ۱$

(۱) $x = -۱$

(۴) $x = ۱$

(۳) $x = -۱$

۴۰ مجموع مقادیر m که به ازای آن‌ها سهمی $y = x^2 + mx + ۱$ بر نیمساز ناحیه اول و سوم مماس شود، کدام است؟

(۴) -۱

(۳) ۲

(۲) -۲

(۱) ۱

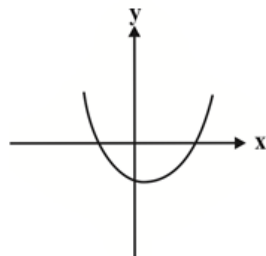
۴۱ سهمی $y = ۲x^2 + ax + b$ نسبت به خط $x = -\frac{۵}{۴}$ متقارن است و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{۱}{۴}$ قطع می‌کند. $\frac{a}{b}$ کدام است؟

(۴) $\frac{۴}{۵}$

(۳) $\frac{۲}{۵}$

(۲) $-\frac{۵}{۴}$

(۱) $-\frac{۵}{۱۱}$



۴۲ اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت روبه‌رو باشد، کدام گزینه در مورد علامت b و c صحیح است؟

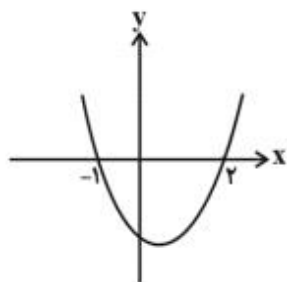
(۱) $c > ۰, b < ۰$

(۲) $c < ۰, b > ۰$

(۳) $c > ۰, b > ۰$

(۴) $c < ۰, b < ۰$

۴۳ شکل مقابل مربوط به سهمی $y = ۲x^2 + bx + c$ است. عرض رأس سهمی $y = cx^2 - x + b$ کدام است؟



(۱) $-\frac{۳۱}{۱۶}$

(۲) $\frac{۳۱}{۱۶}$

(۳) -۲

(۴) ۲

۴۴ یک سهمی از دو نقطه $A(-۲, ۳)$ و $B(۴, ۳)$ عبور می‌کند و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -۱ قطع می‌کند. اندازه پاره خطی که سهمی روی محور x ها ایجاد می‌کند، چقدر است؟

(۴) $۲\sqrt{۳}$

(۳) $\sqrt{۳}$

(۲) ۲

(۱) ۱

۴۵ اگر $(۰, ۵)$ و $(-۲, ۵)$ دو نقطه از سهمی $y = (x - a)^2 + b$ باشند، حاصل $a + b$ کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

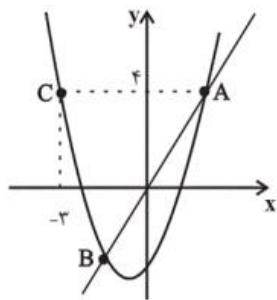
۳۶) مختصات رأس سهمی $y_1 = 2(x+1)^2 - 4$ دو واحد بالاتر از مختصات رأس سهمی $y_2 = x^2 + ax + b$ می باشد و محورهای تقارن آنها یکسان است. اگر نمودار y_2 محور طول ها را در نقاط A و B قطع کند، طول AB کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{6}$ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۸

۳۷) اگر رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ روی محور y ها و $ac < 0$ باشد، مجموع طول نقاط برخورد سهمی و محور x ها کدام است؟

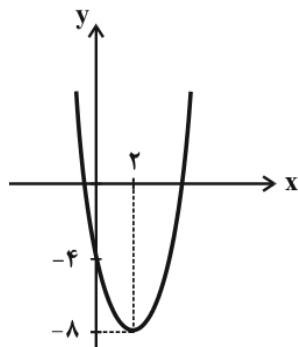
- (۱) $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (۲) صفر (۳) $2\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (۴) $-\frac{c}{a}$

۳۸) در نمودار زیر خط d نمودار سهمی را در نقاط $A = (x_A, 4)$ و $B = (-1, -2)$ قطع کرده است. مجموع طول و عرض نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات کدام است؟



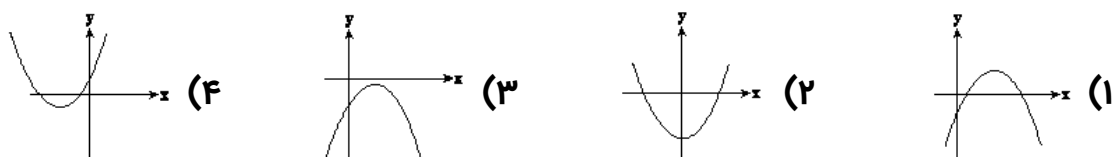
- (۱) -۱
(۲) $-3/5$
(۳) $-2/5$
(۴) -۳

۳۹) سهمی رسم شده شکل زیر، در بازه (m, n) پایین نیمساز ناحیه دوم و چهارم قرار دارد. حاصل $2m + n$ کدام است؟



- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۴۰) اگر خط $x = 1$ محور تقارن سهمی مفروض $y = kx^2 + k^2x + k^3$ باشد، آنگاه شکل سهمی $y = k^3x^2 + k^2x + k$ مطابق کدام گزینه است؟



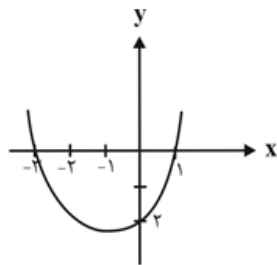
۴۱) اگر رأس سهمی $y = x^2 - mx + m + 1$ بر روی خط $y = x + 1$ واقع باشد، در این صورت مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱ یا ۳ (۲) ۱ یا -۳ (۳) صفر یا ۲ (۴) صفر یا -۲

۴۲) نمودار تابع درجه دومی که محور عمودی را با عرض ۶ و محور افقی را با طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند، خطی با طول از مبدأ $2/5$ و عرض از مبدأ (-10) را با چه طول‌هایی قطع می‌کند؟

- (۱) ۵ و ۳ (۲) ۳ و -۵ (۳) ۴ و -۲ (۴) ۲ و ۴

۴۳) با توجه به نمودار سهمی شکل زیر، کم‌ترین مقدار آن کدام است؟



- (۱) $-\frac{10}{3}$
(۲) $-\frac{8}{3}$
(۳) -۳
(۴) -۴

۴۴) اگر خط $y = mx + b$ گذرنده از رأس سهمی به معادله $y = x^2 - 4x + 1$ و در این نقطه بر سهمی مماس باشد، حاصل $m + b$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳
(۳) ۲ (۴) -۲

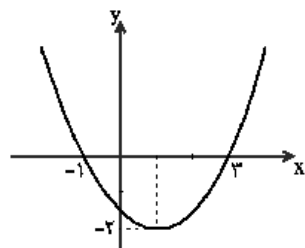
۴۵) محور تقارن سهمی $y = 3x^2 + 6x - 1$ سهمی $y = -2x^2 + x - 1$ را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) $(2, -7)$ (۲) $(1, -2)$ (۳) $(-2, -11)$ (۴) $(-1, -4)$

۴۶) اگر راس یک سهمی نقطه $(3, -1)$ باشد و سهمی محور طول‌ها را در $x = 2$ و $x = b$ و محور y ‌ها را در نقطه‌ای با عرض c قطع می‌کند، مقدار $b + c$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸
(۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۴۷) معادله سهمی شکل روبه‌رو، کدام است؟



- (۱) $y = x^2 - x - 3$ (۲) $y = 2x^2 + x - 1$
(۳) $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{3}{4}$ (۴) $y = \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{3}{4}$

۴۸) اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ فقط از ناحیه‌های سوم و چهارم عبور کند، کدام گزینه حتماً نادرست است؟

- (۱) $ac > 0$ (۲) $ac < 0$ (۳) $bc > 0$ (۴) $bc < 0$

۴۹) هرگاه سهمی $y = mx^2 + (3 - m)x - 3$ نسبت به خط $x = -1$ متقارن باشد، آن‌گاه طول پاره‌خطی که این سهمی بر روی محور x ها جدا می‌کند، کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۲

۵۰) اگر عرض پایین‌ترین نقطه سهمی $y = (k + 1)x^2 - 2x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

سوال ۱ گزینه درست: ۳ قلم‌چی ۱۴۰۰ درصد پاسخگویی: ۳۹٪ متوسط

گزینه «۳»

در واقع S رأس سهمی است و داریم $x_s = -\frac{b}{2a}$ و y_s از جایگذاری x_s در معادله سهمی به دست می‌آید:

$$x_s = \frac{-6}{-2} = 3 \Rightarrow y_s = -9 + 18 + 9 = 18 \Rightarrow \frac{y_s}{x_s} = \frac{18}{3} = 6$$

سوال ۲ گزینه درست: ۱ قلم‌چی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی: ۲۱٪ متوسط

گزینه «۱»

رأس سهمی روی نیم‌ساز ربع اول است، پس مختصات آن را به صورت $S(\alpha, \alpha)$ در نظر می‌گیریم و چون سهمی محور x ها را در نقاط -1 و 3 قطع کرده‌اند، پس معادله آن را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$y = a(x + 1)(x - 3)$$

محل رأس سهمی روی محور تقارن سهمی است، پس میانگین طول نقاط برخورد با محور طول‌ها، طول رأس سهمی را نتیجه می‌دهد:

$$x_s = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$$

پس نقطه $\left(1, \frac{1}{4}\right)$ در سهمی صدق می‌کند.

$$\frac{1}{4} = a(1 + 1)(1 - 3) \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$$

$$y = -\frac{1}{8}(x + 1)(x - 3) \xrightarrow{x=0} y = \frac{3}{8}$$

از آن جایی که سهمی محور طول ها را در نقاطی به طول های ۱- و ۳ قطع می کند، معادله آن به صورت زیر است:

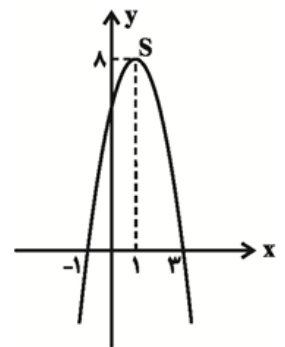
$$y = a(x+1)(x-3) \quad \text{سهمی} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$6 = a(0+1)(0-3) = a(1)(-3) \Rightarrow -3a = 6 \Rightarrow a = -2$$

$$y = -2(x+1)(x-3) = -2(x^2 - 2x - 3) \\ \Rightarrow y = -2x^2 + 4x + 6$$

$$\begin{cases} \text{طول رأس سهمی} : x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-2)} = 1 \\ \text{عرض رأس سهمی} : y_s = -2(1)^2 + 4(1) + 6 \\ \quad \quad \quad = -2 + 4 + 6 = 8 \end{cases}$$

پس فاصله رأس سهمی از محور طول ها ۸ واحد است و گزینه «۱» صحیح است.



گزینه «۱»

راه حل اول:

$$S\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) \text{ رأس سهمی}$$

$$y_s = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(1-8)}{4} = \frac{7}{4}$$

راه حل دوم:

$$y = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) + 1$$

$$y = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) + 1$$

$$y = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{2}{16} + 1$$

$$\text{عرض سهمی} = \frac{-2}{16} + 1 = \frac{-1}{8} + 1 = \frac{7}{8}$$

سوال ۵

گزینه درست: ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۹%

دشوار

مختصات رأس سهمی را محاسبه می‌کنیم:

$$-\frac{b}{2a} = \frac{k}{p}$$

با جایگذاری $x = \frac{k}{p}$ در ضابطه سهمی، عرض سهمی را به دست می‌آوریم:

$$f\left(\frac{k}{p}\right) = \frac{k^2}{p^2} - \frac{k^2}{p} + 1 = 1 - \frac{k^2}{p}$$

مختصات رأس سهمی در معادله خط $y = -2x$ صدق می‌کند.

$$y = -2x \Rightarrow 1 - \frac{k^2}{p} = -2\left(\frac{k}{p}\right) \Rightarrow 4 - k^2 = -4k$$

$$\Rightarrow k^2 - 4k - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 + 16 = 32$$

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} = 2 \pm \sqrt{8}$$

سوال ۶

گزینه درست: ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۵۱%

ساده

گزینه «۳»

نقطه $(-2, -1)$ مختصات راس سهمی است، پس:

$$y = a(x - (-2))^2 - 1$$

سهمی از نقطه $(-1, -2)$ می‌گذرد:

$$y = a(x + 2)^2 - 1 \Rightarrow -2 = a(-1 + 2)^2 - 1$$

$$\Rightarrow -2 = a - 1 \Rightarrow a = -1$$

معادله سهمی:

$$y = -1(x^2 + 4x + 4) - 1 = -x^2 - 4x - 5$$

سوال ۷

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۴۰۰

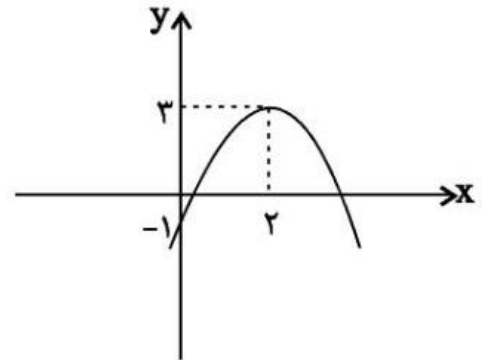
درصد پاسخگویی ۴۳%

متوسط

گزینه «۲»

$$y = -x^2 + 4x - 1 = -(x^2 - 4x) - 1 = -((x-2)^2 - 4) - 1$$

$$\Rightarrow y = -(x-2)^2 + 3$$



با استفاده از نمودار $y = x^2$ ، نمودار $y = -(x-2)^2 + 3$ را رسم می‌کنیم. همانطور که ملاحظه می‌کنید، این سهمی از ناحیه دوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند.

سوال ۸

گزینه درست: ۳

قلمچی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۵۰%

ساده

گزینه «۳»

طبق نمودار، سهمی مورد نظر محور x ها را در نقاطی به طول $x_1 = -1$ و $x_2 = -3$ قطع کرده است. لذا ضابطه سهمی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow y = a(x + 1)(x + 3)$$

همچنین نقطه $(0, 1)$ روی سهمی قرار دارد بنابراین داریم:

$$1 = a(0 + 1)(0 + 3) \Rightarrow 1 = 3a \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}(x + 1)(x + 3) = \frac{1}{3}(x^2 + 4x + 3)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$$

سوال ۹

گزینه درست: ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۵۹%

ساده

گزینه «۳»

اگر $S(r, k)$ رأس سهمی باشد، معادله آن به صورت $f(x) = a(x - r)^2 + k$ به دست می‌آید.

در نمودار داده شده رأس سهمی $S(-2, 1)$ می‌باشد و از طرفی $f(0) = 4$ است.

$$f(x) = a(x - r)^2 + k \xrightarrow{S(-2, 1)} f(x) = a(x + 2)^2 + 1$$

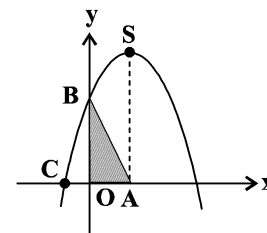
$$f(0) = 4 \Rightarrow a(0 + 2)^2 + 1 = 4 \Rightarrow 4a + 1 = 4 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{4}(x + 2)^2 + 1 = \frac{3}{4}(x^2 + 4x + 4) + 1$$

$$= \frac{3}{4}x^2 + 3x + 4$$

گزینه «۲»

نقطه B را در سهمی جایگذاری می‌کنیم:



$$v = a(\circ)^r + b(\circ) + c \Rightarrow c = v$$

حال نقطه C را در سهمی جایگذاری می‌کنیم:

$$\circ = a(-1)^r + b(-1) + v \Rightarrow a - b + v = \circ \quad (*)$$

مختصات نقطه A به صورت $A\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ است. زیرا طول نقطه A با طول رأس سهمی برابر است.

مساحت مثلث ABO برابر $10/5$ است:

$$S_{\triangle ABO} = 10/5 \Rightarrow \frac{1}{2}(v) \left(-\frac{b}{2a}\right) = 10/5 \Rightarrow v \left(-\frac{b}{2a}\right) = 21$$

$$\Rightarrow \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a$$

$$(*) \Rightarrow a - b + v = \circ \xrightarrow{b=-4a} a - (-4a) + v = \circ$$

$$\Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 4$$

$$\Rightarrow \frac{c-a}{b} = \frac{v-(-1)}{4} = \frac{1}{4} = \frac{4}{16}$$

گزینه «۲»

نکته: در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ معادله محور تقارن $x = -\frac{b}{2a}$ و رأس سهمی $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ است.

معادله محور تقارن دو سهمی را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{-8}{2 \times (-2)} = \frac{-b}{2 \times 1} \Rightarrow 2 = \frac{-b}{2} \Rightarrow b = -4$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۵%

قلمچی ۱۴۰۰

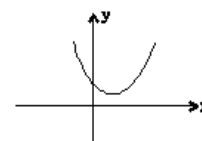
گزینه درست: ۳

سوال ۱۲

گزینه «۳»

$$y = 4x^2 - 4x + 1 + x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow y = 5x^2 - 8x + 5 \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4(5)(5) = 64 - 100 = -36$$



ضریب x^2 مثبت و Δ منفی است، پس در این سهمی همواره $y > 0$ و نمودار آن شبیه شکل بالا است، یعنی از ناحیه‌های اول و دوم مختصات عبور می‌کند.

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۲%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۴

سوال ۱۳

گزینه «۴»

اگر خط و سهمی در یک نقطه مشترک باشند، معادله برابری این دو در نقطه اشتراک باید ریشه مضاعف داشته باشد:

$$x^2 + ax + b = x + 2 \Rightarrow x^2 + (a-1)x + b-2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (a-1)^2 - 4(1)(b-2) = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 4(b-2) \quad (I)$$

از آنجا که نقطه‌ای به طول $x = -2$ روی هر دو نمودار قرار دارد، مختصات این نقطه در هر دو ضابطه صدق می‌کند.

$$y = x + 2 \xrightarrow{x=-2} y = -2 + 2 \Rightarrow y = 0$$

$$(-2, 0) \in y = x^2 + ax + b \Rightarrow (-2)^2 + a(-2) + b = 0$$

$$4 - 2a + b = 0 \Rightarrow b = 2a - 4 \quad (II)$$

با قرار دادن رابطه (II) در رابطه (I) داریم:

$$(a-1)^2 = 4(2a-4) \Rightarrow (a-1)^2 = 8(a-2) \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 8a - 16 \Rightarrow a^2 - 10a + 17 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 10a + 17 = 0 \Rightarrow (a-5)^2 = 0 \Rightarrow a = 5$$

$$\xrightarrow{(II)} b = 2 \times 5 - 4 = 6 \Rightarrow a + b = 11$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۱%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه های دام دار ۳

گزینه درست: ۱

سوال ۱۴

اگر محور تقارن یک سهمی خط $x = h$ باشد، ضابطه سهمی به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ می‌شود:

$$h=1 \Rightarrow y = a(x-1)^2 + k \xrightarrow{\begin{matrix} (2,5) \\ (-1,20) \end{matrix}} \begin{cases} 5 = a(2-1)^2 + k \\ 20 = a(-1-1)^2 + k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 = a + k \\ 20 = 4a + k \end{cases} \Rightarrow a = 5, k = 0$$

$$\xrightarrow{x=0} y = 5$$

سوال ۱۵

گزینه درست: ۱

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۱۸%

متوسط

گزینه «۱»

با توجه به شکل داده شده، $x = -1$ و $x = 2$ ریشه‌های سهمی هستند، پس ضابطه آن به صورت $y = a(x+1)(x-2)$ می‌باشد.

$$y = a(x+1)(x-2) = a(x^2 - x - 2) = ax^2 - ax - 2a$$

$$= 2x^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = -4 \end{cases} \Rightarrow y = cx^2 - x + b = -4x^2 - x - 2$$

$$\Rightarrow y_s = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-((-1)^2 - 4(-4)(-2))}{4(-4)} = -\frac{31}{16}$$

سوال ۱۶

گزینه درست: ۴

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۲%

متوسط

$$y = (a-1)x^2 + x + 3$$

$$\text{معادله محور تقارن سهمی: } x = -\frac{1}{2(a-1)} = 2 \Rightarrow a-1 = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$$

در تلاقی با محور x ها، $y = 0$ است، پس:

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases}$$

پس سهمی در نقطه به طول مثبت ۶ محور x ها را قطع می‌کند.

سوال ۱۷

گزینه درست: ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۴۱%

متوسط

گزینه «۳»

می‌دانیم طول رأس سهمی برابر است با:

$$x = \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow 4a = -b \Rightarrow 4a + b = 0$$

سوال ۱۸

گزینه درست: ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۶۱%

ساده

گزینه «۳»

سهمی رو به پایین است. بنابراین ضریب x^2 باید منفی باشد. بنابراین گزینه «۱» رد می‌شود. سهمی محور y ها را در عرض مثبت قطع کرده پس عرض از مبدأ سهمی مثبت است. پس گزینه «۲» رد می‌شود.

طول رأس سهمی مثبت است پس گزینه «۴» رد می‌شود. زیرا در گزینه «۴» طول رأس سهمی $-\frac{1}{4}$ می‌شود.

سوال ۱۹

گزینه درست: ۱

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۰٪

متوسط

گزینه «۱»

ابتدا ضابطه تابع اولیه را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y = -x^2 + 2x = -(x^2 - 2x + 1 - 1) = -(x - 1)^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{واحد به راست} \\ k \text{ واحد به بالا}}} y = -(x - 1 - 1)^2 + 1 + k$$

$$\Rightarrow y = -(x - 5)^2 + k + 1$$

$$\xrightarrow{\text{راس سهمی}} (5, k + 1) = (\alpha, 10)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ k + 1 = 10 \Rightarrow k = 9 \end{cases} \Rightarrow \alpha k = 9 \times 5 = 45$$

سوال ۲۰

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۴٪

متوسط

ابتدا راس سهمی نمودار اولیه را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2 \\ y_s = -(2)^2 + 4(2) - 3 = 1 \end{cases}$$

نقطه $\left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right|$ به مبدا مختصات منتقل شده است، یعنی نمودار ۲ واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت پایین منتقل شده است. برای آن‌که از نمودار انتقال یافته به نمودار اولیه برسیم باید برعکس انتقال فوق عمل کنیم یعنی ۲ واحد به سمت راست و یک واحد به بالا برویم. لذا نقطه مورد نظر در نمودار اولیه $\left| \begin{smallmatrix} 4 \\ -3 \end{smallmatrix} \right|$ می‌شود.

سوال ۲۱

گزینه درست: ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۱۲٪

دشوار

گزینه «۳»

ابتدا مختصات رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$$\text{طول رأس سهمی } x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = \frac{m}{2}$$

$$y = x^2 - mx + m + 1$$

$$\xrightarrow{x = \frac{m}{2}} y = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + m + 1 = \frac{-m^2 + 4(m+1)}{4}$$

رأس سهمی بر روی خط $y = x + 1$ قرار دارد، بنابراین مختصات رأس سهمی در ضابطه خط صدق می‌کند. پس داریم:

$$\frac{-m^2 + 4(m+1)}{4} = \frac{m}{2} + 1$$

$$\Rightarrow 4m + 4 - m^2 = 2m + 4 \Rightarrow m^2 - 2m = 0$$

$$\Rightarrow m(m - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

طول پاره‌خطی که روی محور x ‌ها جدا شده است، ۶ واحد است. چون رأس سهمی وسط پاره‌خط است، پس یک نقطه روی محور x ‌ها ۳ واحد جلوتر از ۲ و یک نقطه ۳ واحد عقب‌تر از ۲ است.

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 3 = -1 \\ x_2 = 2 + 3 = 5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه } (2,3) \text{ در منحنی صدق می‌کند}} y = a(x+1)(x-5) \xrightarrow{\text{معادله سهمی}}$$

$$a(2+1)(2-5) = 3 \Rightarrow -9a = 3 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}(x+1)(x-5) \xrightarrow{\text{عرض از مبدا}} -\frac{1}{3}(0+1)(0-5) = \frac{5}{3}$$

گزینه «۲»

معادله محور تقارن را یکسان قرار داده و سپس اختلاف عرض نقاط رئوس را برابر ۲۳ قرار می‌دهیم. دو حالت داریم:

$$-\frac{a}{3} = -\frac{a}{-2} \Rightarrow a = -8$$

عرض رأس سهمی $y = a'x^2 + b'x + c'$ برابر $\frac{-b'^2 + 4a'c'}{4a'}$ است. بنابراین:

$$23 = (16 + c) - (b - 16) = \left(-\frac{64 + 4c}{-4}\right) - \left(-\frac{64 - 4b}{-4}\right) : \text{حالت اول}$$

$$\Rightarrow c - b = -9 \Rightarrow a + b - c = 1$$

$$23 = (b - 16) - (16 + c) = \left(-\frac{64 - 4b}{-4}\right) - \left(-\frac{64 + 4c}{-4}\right) : \text{حالت دوم}$$

$$\Rightarrow b - c = 55 \Rightarrow a + b - c = 47$$

گزینه «۳»

ابتدا تابع را به صورت مربع کامل در می‌آوریم.

$$y = x^2 - 4x - 1 + 4 - 4 = (x - 2)^2 - 5$$

حال $x \rightarrow x + 3$ تبدیل می‌شود و به سمت راست معادله یک واحد اضافه می‌کنیم.

$$y = (x - 2)^2 - 5 \xrightarrow{x \rightarrow x+3} y = (x + 1)^2 - 5 \xrightarrow{+1} y = (x + 1)^2 - 4$$

حال دقت کنید گزینه «۳» در تابع صدق نمی‌کند. $(-1, 5) \notin f$

روش دوم: هر کدام از نقاط گزینه‌ها را ۳ واحد به راست یک واحد به پایین منتقل کنید و با صورت سوال چک کنید.

$$(0, -3) \rightarrow (3, -4) \in y = x^2 - 4x - 1$$

$$(1, 0) \rightarrow (4, -1) \in y = x^2 - 4x - 1$$

$$(-1, 5) \rightarrow (2, 4) \notin y = x^2 - 4x - 1 \quad \text{جواب}$$

$$(2, 5) \rightarrow (5, 4) \in y = x^2 - 4x - 1$$

سوال ۲۵

گزینه درست: ۴

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۱۳%

دشوار

گزینه «۴»

$$y = 4\alpha - 6 \Rightarrow 4\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

پس یکی از ریشه‌ها $\frac{3}{2}$ است. $x = 1$ محور تقارن سهمی است، بنابراین:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = a \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{3}{2} \right)$$

با قرار دادن مختصات رأس سهمی در معادله آن، $a = 8$ بدست می‌آید. بنابراین:

$$\Rightarrow y = 8x^2 - 16x + 6$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{1}{8}\right) = 2/5$$

سوال ۲۶

گزینه درست: ۳

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۸%

متوسط

گزینه «۳»

عرض رأس سهمی $y = -1$ است و باید طول رأس سهمی را پیدا کنیم. برای این منظور داریم:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-m}{2 \times \frac{1}{2}} = -m$$

$$\xrightarrow[\text{معادله ی سهمی}]{\text{جایگذاری در}} y = \frac{1}{2}(-m)^2 + m(-m) + 3$$

$$\xrightarrow{y=-1} -1 = \frac{m^2}{2} - m^2 + 3 \Rightarrow \frac{-m^2}{2} = -4$$

$$\Rightarrow m^2 = 8 \Rightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{2} \Rightarrow x_{\text{رأس}} = -2\sqrt{2} \\ m = -2\sqrt{2} \Rightarrow x_{\text{رأس}} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین $m = 2\sqrt{2}$ قابل قبول است.

سوال ۲۷

گزینه درست: ۲

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۲%

متوسط

گزینه «۲»

سهمی از دو نقطه $(-1, 0)$ و $(4, 0)$ می‌گذرد. بنابراین:

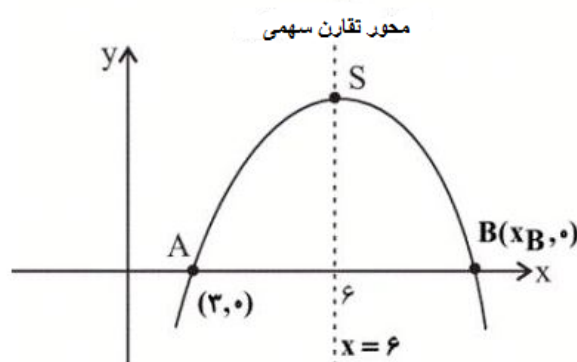
$$\begin{cases} 0 = 2 \times 1 - a - 2b \\ 0 = 2 \times 16 + 4a - 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 2 \\ 4a - 2b = -32 \end{cases} \Rightarrow 5a = -30 \Rightarrow a = -6$$

$$\xrightarrow[a=-6]{a+2b=2} 2b = 8 \Rightarrow b = 4 \xrightarrow{x=a+b=-2}$$

$$y = 2 \times (-2)^2 - 6 \times (-2) - 8 = 12$$

گزینه «۳»

محور تقارن سهمی دقیقاً در وسط ریشه‌ها (در صورت وجود) قرار دارد و طول آن برابر با میانگین طول ریشه‌های سهمی است. پس داریم:



$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 6 = \frac{2 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = 10$$

در نتیجه مختصات ریشه دیگر سهمی $B(10, 0)$ خواهد بود.

چون دو نقطه $A(2, -3)$ و $B(0, -3)$ از این سهمی دارای عرضی یکسان هستند، نسبت به خط تقارن سهمی $x = -\frac{2}{a} = -\frac{3}{3a}$ قرینه‌اند، پس خط تقارن به صورت $x = \frac{0+2}{2} = 1$ می‌باشد. در نتیجه:

$$x = 1 = -\frac{2}{a} \Rightarrow a = -2$$

نقطه $B(0, -3)$ در معادله سهمی صدق می‌کند، پس:

$$-3 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = -3$$

پس معادله سهمی به صورت $y = -2x^2 + 4x - 3$ است که به ازای $x = 1$ ماکزیمم آن برابر با $-2(1)^2 + 4 - 3 = -1$ می‌شود.

گزینه «۳»

معادله نیمساز ناحیه اول و سوم، $y = x$ است.

چون سهمی بر $y = x$ مماس است، پس معادلات آن‌ها را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$x^2 + mx + 1 = x \Rightarrow x^2 + (m-1)x + 1 = 0$$

و چون مماس است، یعنی یک نقطه برخورد دارند، پس: $\Delta = 0$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 4$$

$$\Rightarrow m-1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$$

m مجموع مقادیر $3 + (-1) = 2$

سوال ۳۱

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۱%

متوسط

در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ، خط تقارن $x = -\frac{b}{2a}$ است.

در سهمی داده شده خط تقارن به صورت $x = -\frac{a}{4}$ است:

$$-\frac{a}{4} = -\frac{5}{4} \Rightarrow a = 5$$

سهمی محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{1}{4}$ قطع می‌کند پس سهمی از نقطه $(\frac{1}{4}, 0)$ می‌گذرد. بنابراین:

$$y = 2x^2 + 5x + b \xrightarrow{(\frac{1}{4}, 0)} 0 = 2 \times (\frac{1}{4})^2 + 5 \times \frac{1}{4} + b$$

$$\Rightarrow b = -3$$

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

سوال ۳۲

گزینه درست: ۴

گزینه های دام دار ۲

قلمچی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۳۳%

متوسط

گزینه «۴»

چون سهمی محوری را زیر محور x ها قطع کرده است، علامت c منفی است و از آن جا که طول راس سهمی مثبت است پس $\frac{-b}{2a} > 0$ است چون $a > 0$ پس علامت b هم منفی است. $b < 0$ و $c < 0$

سوال ۳۳

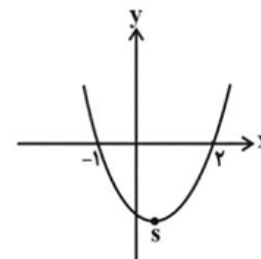
گزینه درست: ۱

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۱۸%

متوسط

با توجه به شکل $x = -1$ و $x = 2$ ریشه‌های معادله $2x^2 + bx + c = 0$ می‌باشند. از طرفی وسط دو ریشه طول رأس سهمی است پس:



$$x_s = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_s = \frac{-b}{2(2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -2$$

$$2x^2 + bx + c = 0 \xrightarrow[x=-1]{b=-2} 2 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = -4$$

$$y = 2x^2 - x + b \xrightarrow[b=-2]{c=-4} y = -4x^2 - x - 2$$

$$y_{s\text{چند}} = \frac{4a \cdot c - b^2}{4a} = \frac{4(-4)(-2) - (-1)^2}{4(-4)} = \frac{-31}{16}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۸٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه های دام دار ۱

گزینه درست: ۴

سوال ۳۴

گزینه «۴»

میانگین طول دو نقطه هم‌عرض روی سهمی برابر با طول نقطه راس سهمی است.

$$A(-2, 3), B(4, 3) \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x = \frac{-2+4}{2} = 1 \xrightarrow{\text{مختصات راس}} S(1, \beta)$$

نکته: معادله سهمی که رأس آن $S(\alpha, \beta)$ باشد، در حالت کلی به‌صورت زیر است:

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

$$\text{پس داریم: } y = a(x - 1)^2 + \beta$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{محل برخورد با } y \text{ ها: } x = 0 \Rightarrow y = a + \beta = -1 \\ \text{نقطه } A(-2, 3) \text{ بر روی سهمی است: } a(-2 - 1)^2 + \beta = 3 \Rightarrow 9a + \beta = 3 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3}, \beta = -\frac{4}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}(x - 1)^2 - \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}(x - 1)^2 - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 4 \Rightarrow x - 1 = \pm 2 \Rightarrow x = 3 \text{ or } x = -1$$

$$\Rightarrow x - 1 = \pm \sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{4} + 1 \\ x_2 = -\sqrt{4} + 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اختلاف}} 2\sqrt{4}$$

ساده

درصد پاسخگویی ۴۵٪

قلمچی ۱۴۰۰

گزینه درست: ۳

سوال ۳۵

گزینه «۳»

با توجه به اینکه عرض دو نقطه با هم برابر است، بنابراین میانگین طول دو نقطه، خط تقارن سهمی را مشخص می‌کند، در نتیجه:

$$a = \frac{0 + (-2)}{2} = -1$$

$$y = (x + 1)^2 + b \xrightarrow{(0, 5)} 5 = 1 + b \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a + b = 3$$

مختصات رأس سهمی $y_1 = 2(x+1)^2 - 4$ به صورت $(-1, -4)$ است که از مختصات رأس سهمی y_2 دو واحد بالاتر است، پس عرض رأس سهمی y_2 دو واحد پایین‌تر از عرض رأس سهمی y_1 است، بنابراین:

$$y_S = -4 - 2 = -6 \quad \text{عرض رأس سهمی } y_2$$

محور تقارن دو سهمی یکسان است، پس طول رأس هر دو سهمی یکسان است، بنابراین:

$$x_S = -1 \Rightarrow S(-1, -6) \quad \text{طول رأس سهمی } y_2$$

بنابراین: $y_2 = (x+1)^2 - 6$ ، نقاط تقاطع سهمی y_2 با محور طول‌ها از حل معادله $y_2 = 0$ به دست می‌آید:

$$y_2 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 - 6 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 6$$

$$\Rightarrow x+1 = \pm\sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} x_A = \sqrt{6} - 1 \\ x_B = -\sqrt{6} - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = |x_A - x_B| = 2\sqrt{6}$$

$$-\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow y = ax^2 + c$$

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a}$$

$ac < 0$ بنابراین $-\frac{c}{a} > 0$ ، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}} \\ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

با توجه به این که خط از دو نقطه $(0,0)$ و $B = (-1, -2)$ عبور می‌کند، معادله خط به صورت $y = 2x$ است. طول نقطه A را به دست می‌آوریم:

$$y = 2x \xrightarrow{y_A=4} x_A = 2$$

اگر معادله سهمی را به صورت $y = ax^2 + bx + c$ در نظر بگیریم، سه نقطه $B = (-1, -2)$ ، $C = (-3, 4)$ و $A = (2, 4)$ در این معادله صدق می‌کند. بنابراین:

$$\left\{ \begin{array}{l} a - b + c = -2 \\ 9a - 3b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 4 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفریق}} \left\{ \begin{array}{l} 8a - 2b = 6 \\ 5a - 5b = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{array} \right.$$

در نتیجه معادله سهمی به صورت $y = x^2 + x - 2$ است. اکنون برای به دست آوردن مختصات محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات، داریم:

$$\xrightarrow{y=0} x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$$

$$\xrightarrow{x=0} y = 0 + 0 - 2 \Rightarrow y = -2$$

$$\Rightarrow -2 + 1 - 2 = -3$$

معادله سهمی به مختصات رأس (x_s, y_s) به صورت زیر است:

$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$$

با جای‌گذاری $x_s = 2$ و $y_s = -8$ ، داریم:

$$f(x) = a(x - 2)^2 - 8$$

نقطه $(0, -4)$ روی سهمی است، پس:

$$f(0) = -4 \Rightarrow 4a - 8 = -4 \Rightarrow a = 1$$

معادله سهمی به صورت $f(x) = (x - 2)^2 - 8$ است.

می‌خواهیم f پایین نیم‌ساز ربع دوم و چهارم قرار گیرد:

$$f(x) < -x \Rightarrow (x - 2)^2 - 8 < -x \Rightarrow x^2 - 4x - 4 < -x$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 4$$

پس:

$$2m + n = 2(-1) + 4 = 2$$

سوال ۴۰

گزینه درست: ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۹%

متوسط

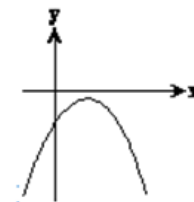
گزینه «۳»

محور تقارن سهمی $y = ax^2 + bx + c$ خط $x = -\frac{b}{2a}$ است:

$$-\frac{k^2}{2k} = 1 \Rightarrow k = -2$$

پس سهمی مورد نظر دارای ضابطه $y = -8x^2 + 4x - 2$ است.

این سهمی دهانه‌اش رو به پایین ($a < 0$) و طول رأس آن مثبت ($-\frac{b}{2a} > 0$) و عرض از مبدأ آن منفی ($c < 0$) و بدون ریشه ($\Delta < 0$) است که در شرایط سهمی زیر صدق می‌کند:



سوال ۴۱

گزینه درست: ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۷%

متوسط

ابتدا مختصات رأس سهمی را بدست می‌آوریم:

$$\text{طول رأس سهمی } x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = \frac{m}{2}$$

$$y = x^2 - mx + m + 1$$

$$\xrightarrow{x=\frac{m}{2}} y = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + m + 1 = \frac{-m^2 + 4(m+1)}{4}$$

رأس سهمی بر روی خط $y = x + 1$ قرار دارد، بنابراین مختصات رأس سهمی در معادله‌ی خط صدق می‌کند. پس داریم:

$$\frac{-m^2 + 4(m+1)}{4} = \frac{m}{2} + 1$$

$$\Rightarrow 4m + 4 - m^2 = 2m + 4 \Rightarrow m^2 - 2m = 0$$

$$\Rightarrow m(m - 2) = 0 \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

گزینه «۴»

معادله تابع درجه دومی که محور x ها را با طول‌های x_1 و x_2 قطع می‌کند، به صورت $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ است، پس طبق فرض:

$$y = a(x - 1)(x - 3) \text{ معادله تابع درجه دوم}$$

از طرفی مختصات نقطه $(0, 6)$ در تابع صدق می‌کند، بنابراین:

$$6 = a(0 - 1)(0 - 3) \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow y = 2(x - 1)(x - 3) = 2x^2 - 8x + 6$$

معادله خط با طول از مبدأ و عرض از مبدأ q به صورت $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ است، پس:

$$\text{معادله خط: } \frac{x}{2/5} + \frac{y}{-10} = 1 \xrightarrow{\times 10} 5x - y = 10 \Rightarrow y = 5x - 10$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 5x - 10 \Rightarrow 2x^2 - 13x + 16 = 0 \Rightarrow x = 2, 4$$

گزینه «۲»

فرم کلی سهمی به صورت $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ است. از روی نمودار مشخص است که $\beta = 1$ و $\alpha = -3$ می‌باشد و نقطه $(0, -2)$ روی سهمی قرار دارد.

$$y = a(x + 3)(x - 1) \xrightarrow{(0, -2)} -2 = a(3)(-1) \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}(x^2 + 2x - 3) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 2$$

کمترین مقدار سهمی در واقع عرض رأس سهمی است.

$$x_s = \frac{-b}{2a}, y_s = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$$

$$x_s = \frac{-\frac{4}{3}}{2\left(\frac{2}{3}\right)} = -1 \Rightarrow y_s = \frac{2}{3}(-1)^2 + \frac{4}{3}(-1) - 2 = \frac{-8}{3}$$

گزینه «۲»

مختصات رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2 \Rightarrow y_s = \frac{2}{3} - 8 + 1 = -3$$

$$\text{رأس سهمی} = (2, -3)$$

اگر خطی بخواهد بر رأس سهمی داده شده مماس باشد، باید افقی باشد، پس $m = 0$ و معادله خط به صورت زیر است:

$$y = -3$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow m + b = -3$$

سوال ۴۵

گزینه درست: ۴

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۴۰%

متوسط

گزینه «۴»

محور تقارن سهمی $y = ax^2 + bx + c$ خط $x = \frac{-b}{2a}$ است، پس:

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 + 6x - 1 \\ x &= \frac{-6}{2 \times 3} = -1 \\ \xrightarrow{x=-1} y &= -2 - 1 - 1 = -4 \\ y &= -2x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

نقطه مورد نظر $(-1, -4)$ است.

سوال ۴۶

گزینه درست: ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۶%

متوسط

راس سهمی f نقطه $(3, -1)$ است. چون $f(2) = 0$ ، پس سهمی محور x ها را در نقطه‌ای با طول ۲ قطع می‌کند. با توجه به آن که تابع نسبت به خط $x = 3$ متقارن است، پس تابع محور x ها را در نقطه $(4, 0)$ نیز قطع می‌کند، بنابراین $b = 4$ است.

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-3)^2 - 1 \\ f(2) = 0 &\Rightarrow 0 = a(2-3)^2 - 1 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ \xrightarrow{x=0} f(0) &= c = 1(0-3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8 \\ \Rightarrow c + b &= 8 + 4 = 12 \end{aligned}$$

سوال ۴۷

گزینه درست: ۴

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۹%

متوسط

گزینه «۴»

راه حل اول: اولاً سهمی رو به بالا باز می‌شود، پس $a > 0$ و گزینه ۳ حذف می‌شود. ثانیاً با توجه به شکل، رأس سهمی نقطه S'_{-2} است. در ۳ گزینه دیگر، رأس را پیدا می‌کنیم.

می‌کنیم.

(غقیق) $y = x^2 - x - 3 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2(1)} = \frac{1}{2}$ گزینه (۱)

(غقیق) $y = 2x^2 + x - 1 \Rightarrow x_S = \frac{-1}{2(2)} = \frac{-1}{4}$ گزینه (۲)

(غقیق) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \Rightarrow x_S = \frac{-(-1)}{2(\frac{1}{2})} = 1 \Rightarrow y_S = -2$ گزینه (۴)

پس گزینه (۴) درست است.

راه حل دوم: نمودار سهمی محور y ها را با عرضی بیشتر از ۲- و کمتر از ۱- قطع می‌کند که تنها در معادله سهمی گزینه ۴ چنین نقطه‌ای وجود دارد.

سوال ۴۸

گزینه درست: ۲

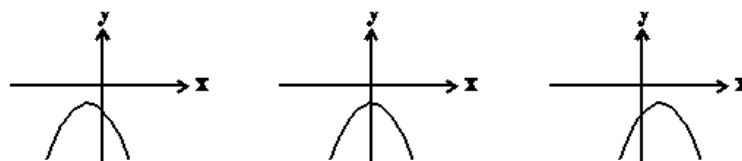
قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۵٪

متوسط

گزینه «۲»

نمودار به حالت‌های زیر می‌تواند باشد:



$$a < 0$$

$$a < 0$$

$$a < 0$$

$$b < 0$$

$$b = 0$$

$$b > 0$$

$$c < 0$$

$$c < 0$$

$$c < 0$$

پس همواره $a < 0$ ، $c < 0$ و $b \in R$ است. پس هیچگاه $ac < 0$ نمی‌شود.

سوال ۴۹

گزینه درست: ۱

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۴٪

متوسط

گزینه «۱»

با توجه به این که $x = -1$ محور تقارن سهمی می‌باشد، بنابراین:

$$-\frac{b}{2a} = -1 \Rightarrow -\frac{(3-m)}{2m} = -1 \Rightarrow 2m = 3 - m \Rightarrow 3m = 3 \Rightarrow m = 1$$

معادله سهمی را تشکیل می‌دهیم:

$$y = x^2 + 2x - 3$$

برای پیدا کردن طول پاره خطی که سهمی بر روی محور x ها جدا کرده، بایستی ریشه‌های معادله را پیدا کنیم.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\text{طول پاره خط} = |-3 - 1| = 4$$

سوال ۵۰

گزینه درست: ۳

گزینه های دام دار ۱

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۰٪

متوسط

گزینه «۳»

ضریب x^2 باید مثبت باشد:

$$k + 1 > 0 \Rightarrow k > -1$$

از طرفی چون کمترین مقدار عبارت درجه دوم از رابطه $\frac{\Delta}{4a}$ به دست می‌آید، برای آن که کمترین مقدار برابر صفر باشد، باید Δ صفر باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4 - 4k(k + 1) = 0 \Rightarrow k^2 + k - 1 = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

با اعمال شرط $k > -1$ ، تنها مقدار $k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ قابل قبول است.

